



سَنِش‌دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

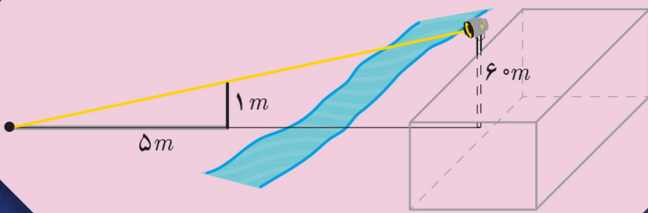
ویژه پایه یازدهم

اسفند ۱۴۰۳

# دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۳

ریاضی ۲ (رشته علوم تجربی)



۱۴۰۳\_۱۴۰۴



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



## ● معاون تولید محتوا: علی الفتی

## ● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

طراحان

گروه عمومی: علی اکبر آخوندی  
۱۳۹۶گروه انسانی: علی اکبر آخوندی  
۱۳۹۶ادبیات  
فارسیمسئولین درس:  
عماد فیض آبادی  
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی  
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و  
زندگیمسئولین درس:  
علی اکبر آخوندی  
زهرا محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی  
زهرا محمدی • محبوبه ابتهسامزبان  
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و  
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پزنگ  
مهراوه مجتهدجامعه  
شناسیمسئول درس: الهام رضایی  
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری  
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان  
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی  
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان  
عربیمسئولین درس:  
پویا رضاداد  
مائده خدایاری  
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی  
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

## تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار  
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی  
الهه ریاحی نسب

## جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه  
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

## اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی  
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت  
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی  
دستیار: فاطمه صفری

رضا کیانپور





-۱

الف) نادرست

زاویه  $۱۹۰^\circ$  در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد پس تنازنت آن مثبت است. زاویه  $\frac{۵\pi}{۳}$  در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد، پس سینوس آن منفی است. بنابراین حاصل  $\tan ۱۹۰^\circ - \sin \frac{۵\pi}{۳}$  مقداری مثبت است.

ب) نادرست

کمترین مقدار  $\sin(x + \frac{\pi}{۴})$  برابر  $-۱$  است. در  $x = \frac{۳\pi}{۴}$  این عبارت برابر صفر است.

پ) نادرست

دامنه تابع  $y = ۲^x$  مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت می باشد.

ت) درست

تابع  $y = \log_a x$  وارون تابع  $y = a^x$  است. اگر  $f$  از  $(۲, ۳)$  عبور کند،  $f^{-۱}$  از  $(۳, ۲)$  می گذرد.

-۲

الف)  $-\frac{۳}{۲}$

نکته (نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل):

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cos ۱۲۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\tan ۱۳۵^\circ + \cos ۱۲۰^\circ = -۱ - \frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

ب) ۲

نکته: دامنه تابع سینوس  $R$  و برد آن بازه  $[-۱, ۱]$  است.

بیشترین مقدار تابع  $y = \sin x$  برابر  $۱$  و در نتیجه بیشترین مقدار تابع  $y = ۲ \sin x$  برابر  $۲$  می باشد.

پ)  $(۰, +\infty)$

نکته: دامنه تابع نمایی  $R$  و برد آن  $(۰, +\infty)$  می باشد.

ت) ۳

نکته:  $a^{\log_a b} = b$  ( $a \neq ۱$  و  $b$  اعداد حقیقی مثبت اند)

-۳

الف) گزینه ۴

از آنجا که شعاع دایره مثلثاتی  $۱$  است، داریم:

$$x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{9} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ب) گزینه ۱

نکته (نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف  $\frac{\pi}{۴}$  رادیان):

$$\sin\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right) = -\tan \theta$$



پ) گزینه ۴

نکته: اگر  $a > 1$  بوده و  $x < y$  باشد، داریم:

$$a^x < a^y$$

نکته: اگر  $0 < a < 1$  بوده و  $x < y$  باشد، داریم:

$$a^x > a^y$$

بررسی گزینه‌ها:

$$\text{گزینه ۱: } -\frac{1}{4} < -\frac{1}{3} \xrightarrow{2 > 1} 2^{-\frac{1}{2}} < 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{گزینه ۲: } \sqrt{2} < \sqrt{3} \xrightarrow{0 < \frac{1}{2} < 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$$

$$\text{گزینه ۳: } -3 < -2 \xrightarrow{\sqrt{2} > 1} (\sqrt{2})^{-3} < (\sqrt{2})^{-2}$$

$$\text{گزینه ۴: } 2 < 3 \xrightarrow{0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

ت) گزینه ۲

نکته:

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$\log_a \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = -1$$

-۴

نکته (نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل  $2k\pi$  رادیان):  
در حالت کلی برای هر عدد صحیح  $k$ ، داریم:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نکته (نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه):

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

نکته (نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف  $\pi$  رادیان):

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \tan\left(2\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cot(66^\circ) = \cot(72^\circ - 6^\circ) = \cot(-6^\circ) = -\cot 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(57^\circ) = \cos(36^\circ + 21^\circ) = \cos(21^\circ) = \cos(18^\circ + 3^\circ) = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین:

$$A = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$



-۵

الف) با توجه به رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  داریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

ب)

نکته (نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه):

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

نکته (نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل):

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

با توجه به نکات فوق داریم:

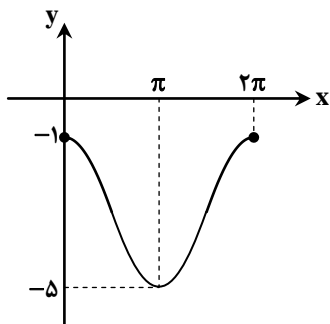
$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{4}$$

-۶

الف) نمودار مربوط به تابع شماره ۱ است.

با توجه به نمودار، مقدار تابع در  $x = \pi$  باید برابر ۳ باشد، اما در تابع شماره ۲ مقدار تابع در  $x = \pi$  برابر ۵- است.

ب) برای رسم نمودار تابع  $y = 2 \cos x - 3$  می‌بایست در نمودار  $y = \cos x$ ، عرض نقاط را دو برابر کرده و نمودار حاصل را سه واحد به پایین ببریم.



-۷

با توجه به نمودار رسم شده داریم:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow a \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b = 2 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}a + b = 2 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow a \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + b = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

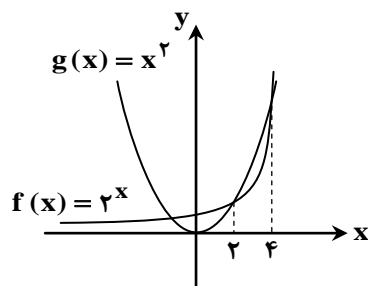
با جای‌گذاری در یکی از معادلات، مقدار  $a$  برابر  $-\sqrt{2}$  به دست می‌آید.

-۸

با توجه به نمودار دو تابع مشخص است تابع  $g(x) = x^2$  در بازه  $(2, 4)$  بالاتر از

$f(x) = 2^x$  است. بنابراین فقط به‌ازای یک عدد طبیعی (یعنی  $x = 3$ ) رابطه  $x^2 > 2^x$

برقرار می‌باشد.





-۹

نکته: معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند. برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم  $a^x = a^y$  آن‌گاه  $x = y$  و برعکس.  
الف) ابتدا پایه‌ها را یکسان کرده و سپس توان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 8^{x+2} \Rightarrow (2^{-2})^{2x-1} = (2^3)^{x+2} \Rightarrow 2^{-4x+2} = 2^{3x+6} \Rightarrow -4x+2 = 3x+6 \Rightarrow 7x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{7}$$

ب) راه حل اول:

با فرض  $3^x = k$  خواهیم داشت:

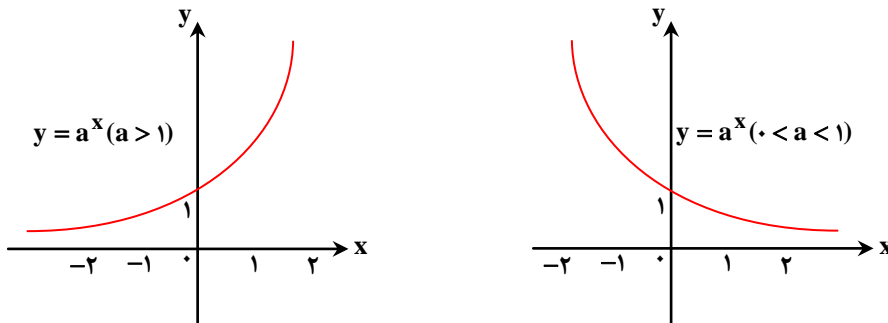
$$k^2 = k+6 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow (k+2)(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = -2 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$9^x = 3^x + 6 \Rightarrow (3^x)^2 - 3^x - 6 = 0 \Rightarrow (3^x + 2)(3^x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^x = -2 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

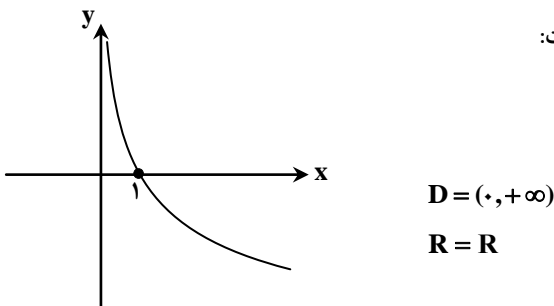
-۱۰

نکته: نمودار تابع  $y = a^x$  به صورت زیر است:



تابع  $y = \log_a x$  وارون تابع  $y = a^x$  بوده و در نتیجه نمودار آن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه است.

از آنجا که  $0 < \frac{1}{3} < 1$  می‌باشد، پس نمودار تابع  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  به صورت زیر است:



$D = (0, +\infty)$   
 $R = R$

-۱۱

نکته (خواص لگاریتم):

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b \qquad \log_a b^n = n \log_a b \qquad \log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (b, c \neq 1 \text{ و } a, b \text{ اعداد حقیقی مثبت اند})$$

الف) با توجه به خواص لگاریتم می‌توان نوشت:

$$\log 7\sqrt{5} = 2 \log(\sqrt{5} \times 7) = 2(2 \log 5 + \log 7) = 2(2(1 - \log 2) + \log 7) = 2(2 \times 0.7 + 0.48) = 2 \times 1.88 = 3.76$$

دقت کنید که در ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$\log 10 = 1 \Rightarrow \log(2 \times 5) = 1 \Rightarrow \log 2 + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2$$

ب) با توجه به خواص لگاریتم می‌توان نوشت:

$$\log_{\sqrt[3]{24}} \sqrt{54} = \frac{\log \sqrt{54}}{\log \sqrt[3]{24}} = \frac{\frac{1}{2} \log(3^2 \times 2)}{\frac{1}{3} \log(2^3 \times 3)} = \frac{3}{2} \times \frac{2 \log 3 + \log 2}{3 \log 2 + \log 3} = \frac{3}{2} \times \frac{2(0.48) + 0.3}{3(0.3) + 0.48} = \frac{3}{2} \times \frac{1.16}{1.38} = \frac{3}{2} \times \frac{116}{138} = \frac{116}{46}$$



-۱۲

نکته: اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت ( $a \neq 1$ ) باشد، آن گاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی  $\log_a x = \log_a y$  ( $x, y > 0$ ) می توان نتیجه گرفت  $x = y$  و به عکس، اگر  $x = y$  ( $x, y > 0$ ) آن گاه  $\log_a x = \log_a y$ .

$$\text{نکته: } b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

$$f(3) = 5 \Rightarrow 2 \log_7(3+a) + 3 = 5 \Rightarrow 2 \log_7(3+a) = 2 \Rightarrow \log_7(3+a) = 1 \Rightarrow 3+a = 7 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین:

$$f(x) = 2 \log_7(x-1) + 3 \Rightarrow f(5) = 2 \log_7 4 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

-۱۳

نکته: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) باشند، آن گاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

نکته:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

با توجه به روابط بین ریشه های معادله درجه دوم داریم:

$$\text{جمع ریشه ها } S = -m$$

$$\Rightarrow -m = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \times 3) = \log_6 6 = 1 \Rightarrow m = -1$$

-۱۴

$$\text{نکته: } b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

نکته: اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت ( $a \neq 1$ ) باشد، آن گاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی  $\log_a x = \log_a y$  ( $x, y > 0$ ) می توان نتیجه گرفت  $x = y$  و به عکس، اگر  $x = y$  ( $x, y > 0$ ) آن گاه  $\log_a x = \log_a y$ .

الف)  $\log_3 x = \log_3 2 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 x = \log_3 (2 \times 5) \Rightarrow x = 2 \times 5 = 10$

ب)  $\log_7(x+2) + \log_7(x-2) = 5 \Rightarrow \log_7(x+2)(x-2) = 5$

$$\Rightarrow \log_7(x^2 - 4) = 5 \Rightarrow x^2 - 4 = 7^5 = 16807 \Rightarrow x^2 = 16811 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{16811} \\ x = -\sqrt{16811} \end{cases}$$

جواب  $x = -6$  عبارت جلوی لگاریتم ها را منفی می کند و بنابراین غیرقابل قبول است.